

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记27——极坐标下的面积

直角坐标是常用的坐标法，但是对于一些特别的问题，在直角坐标系下处理就显得有点笨拙了。这个时候，不妨试试极坐标。它可以使得问题变得出乎意料的简洁，也能让问题直观和清晰起来。

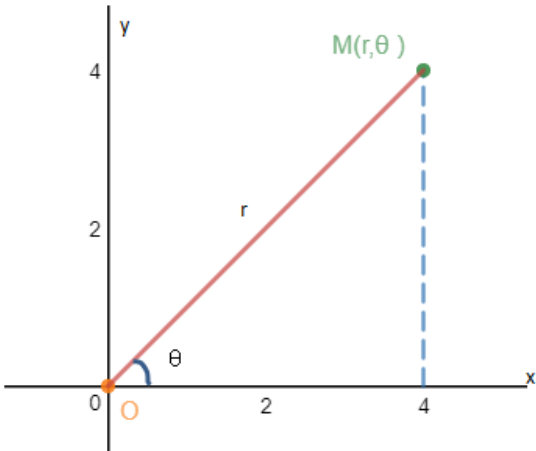
极坐标

什么是极坐标

概念来自百度百科：

在平面内取一个定点O，叫极点，引一条射线Ox，叫做极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向）。对于平面内任何一点M，用r表示线段OM的长度，θ表示从Ox到OM的角度，r叫做点M的极径，θ叫做点M的极角，有序数对 (r,θ)就叫点M的极坐标，这样建立的坐标系叫做极坐标系。通常情况下，M的极径坐标单位为1（长度单位），极角坐标单位为rad（或°）。

简单地说，极坐标有两个主要部分：长度和方向。



极坐标仅仅是将直角坐标系的点换了一个表示法，仍未脱离原来的直角坐标系。很容易知道，如果M用x和y表示，那么：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

这就是直角坐标系转换为极坐标表示法的转换公式。此外：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

实际上距离和夹角都可能是负数，这种写法可以避免和正负号搅合在一起。

注：在极坐标中，x不再是y的函数，即x不再是变量，这在上篇文章的“新的思维模式”一节做过详细说明。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

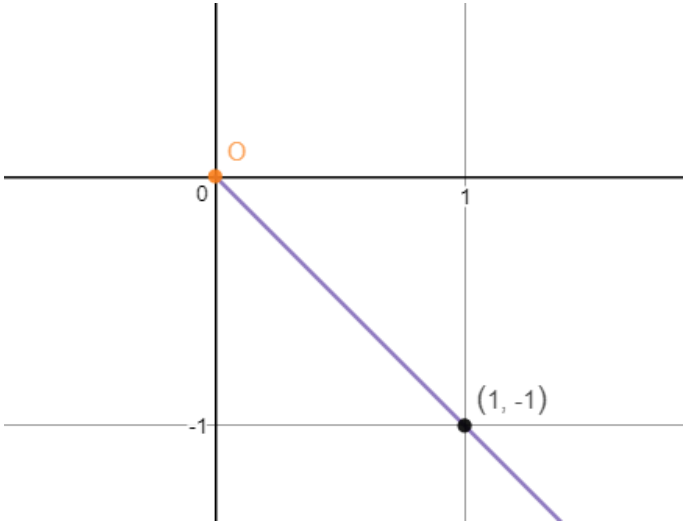
最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

极坐标下的点、直线和圆

点

现在尝试将 $(x, y) = (1, -1)$ 转换为极坐标表示法：



根据转换公式，可以得到三组答案：

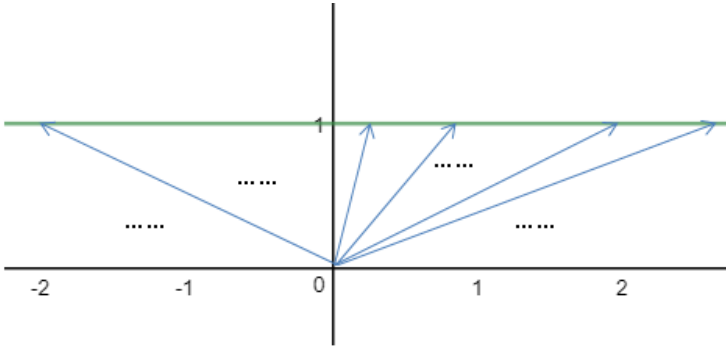
- 1) $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$
- 2) $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{-\pi}{4}$
- 3) $r = -\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$

直线

用极坐标表示直线 $y = 1$ 。

$y = r\sin\theta=1, \quad r = 1/\sin\theta$

这就是结果。这可以用下图表示：



图中每个向量长度都表示 r ，与 x 轴的夹角是 θ ， $r = 1/\sin\theta$ 呈扇形展开，因此也可以知道 θ 的取值范围是 $0 \leq \theta \leq \pi$

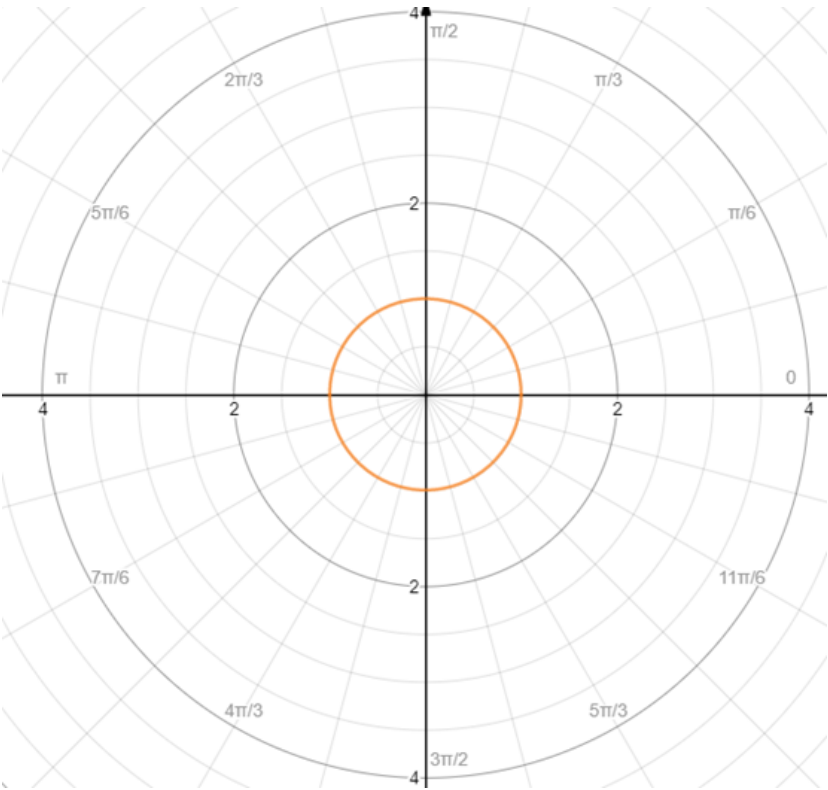
圆

在直角坐标系下，半径为 a 的圆是 $x^2 + y^2 = a^2$ ，转换为极坐标后：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
- wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)很nice
- 尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)有些图片挂了呢
- ccchendada
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系
- trustInU

$$a = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r$$

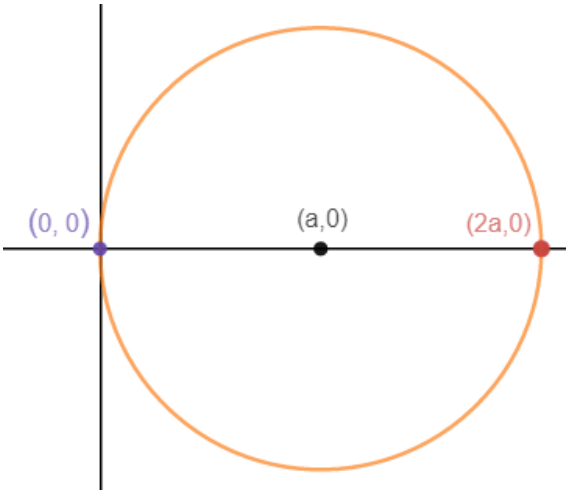
所以可以用 $r = a$ 表示极坐标系下的圆，当 r 的取值范围是 $(-\infty, +\infty)$ 时，表示极坐标系下的所有点。



r = 1

示例

用极坐标表示 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$



圆心并不在原点。我们可以直接套用公式：

$$(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2$$

也可以使用一个比较快的方法，先计算，后代入：

$$(x-a)^2 + y^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = a^2$$

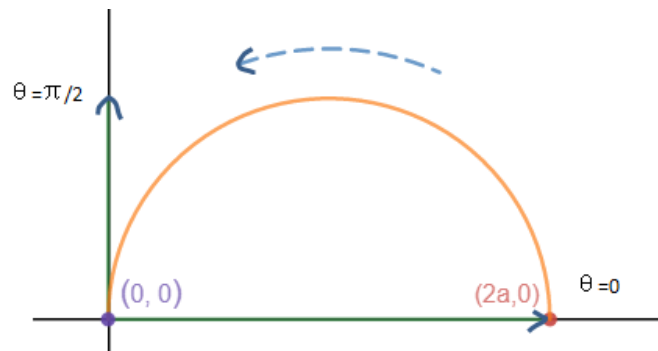
$$x^2 + y^2 = 2xa$$

$$r^2 = 2a\cos\theta$$

$$r = 2a\cos\theta$$

还剩下最后一点， θ 的取值范围，少了这点，我们就无法对其进行积分。

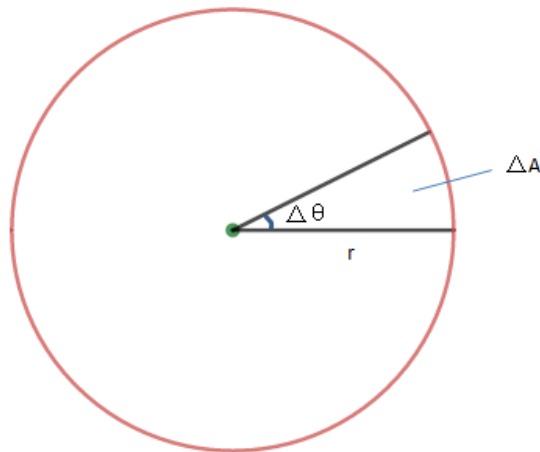
当 $\theta = 0$ 时， r 的一端在 $(2a, 0)$ 点；点沿着圆逆时针转动，当 $\theta = \pi/2$ 时点在 $(0, 0)$ 处，期间 r 扫过了上半圆：



同理，当 $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ 时， r 扫过了下半圆。因此， θ 的取值范围是 $[-\pi/2, \pi/2]$

极坐标下的面积

面积公式

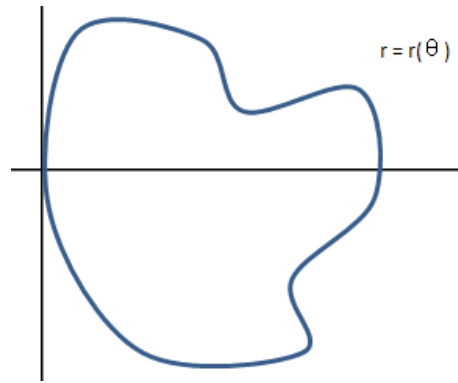


如上图所示，在已知半径和夹角的情况下很容易求得扇形的面积。

$$\Delta A = \pi r^2 \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

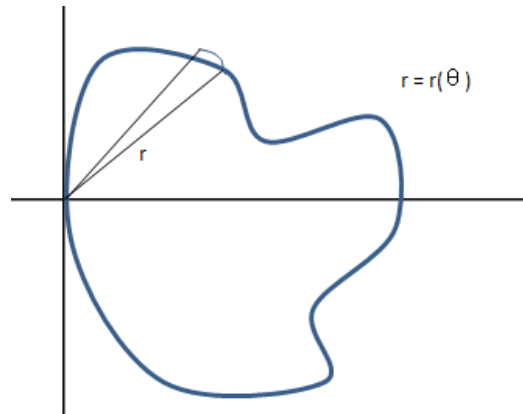
$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \pi r^2$$

如果是一个不规则曲线形成的面积呢？



$$A = ?$$

我们可以利用黎曼和的知识对其进行切分，形成一个个小扇形：



$$\Delta A \approx \pi r^2 \frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

曲线内的任意扇形：

$$A_{part} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

整个面积：

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

这也是极坐标下的面积公式。

示例1

计算 $r = 2\cos\theta$ 的面积。

这在上一节的示例中出现过，如果退化为直角坐标系，很容易看出是一个圆，其面积是：

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (2a \cos \theta)^2 d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (2a \cos \theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= a^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta \right) \\
 &= a^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C \\
 A &= a^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2
 \end{aligned}$$

这正是期待的结果。

示例2

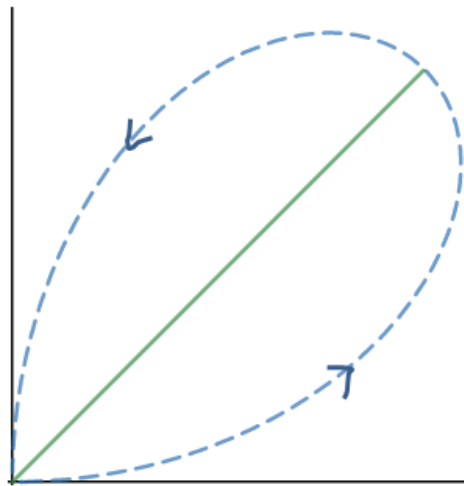
$r = \sin 2\theta$ 的面积

为了更直观地计算面积，首先要画图。

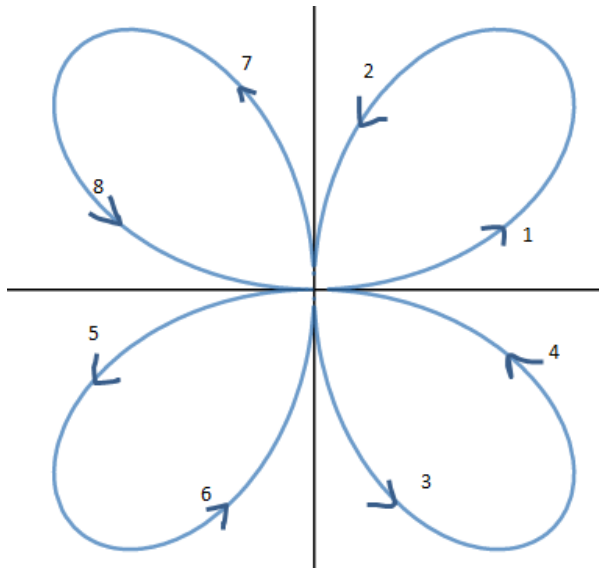
相面是 θ 在第一象限内的取值：

$$\theta = 0, \quad r = 0; \quad \theta = \pi/4, \quad r = 1; \quad \theta = \pi/2, \quad r = 0.$$

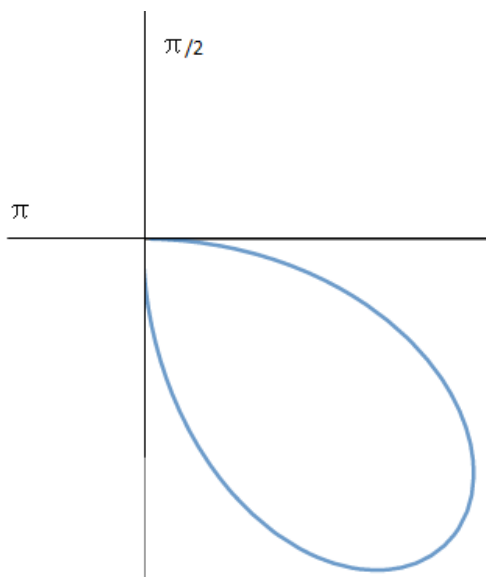
$\pi/2$ 是一个周期，四个象限的图形应当一致：



实际上这就是著名的四叶玫瑰函数，它的运动轨迹如下：



当 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ 时, 曲线向相反方向运动:



现在可以计算面积了。

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin 2\theta)^2 d\theta$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [极坐标](#), [面积](#), [积分](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记26——参数方程](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记28——不定式和洛必达法则](#)

posted on 2017-12-04 22:18 我是8位的 阅读(12611) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

kuaidaili.com

广告 X

IP被封？一键切换IP/按小时计费

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes